

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记21——伴随矩阵和克莱姆法则

伴随矩阵

对于2×2矩阵来说，它的逆矩阵公式：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

对于更高阶矩阵，我们也希望使用类似的公式。从2×2的逆矩阵公式可以看出，它的逆矩阵由两部分组成，其一是行列式的倒数，这意味着矩阵可逆的前提是行列式不为0，问题是另一部分是什么？

仔细观察 $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ，发现它和代数余子式有一定的关系，对于A来说：

a的代数余子式： $C_{11} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & d \end{bmatrix} = d$

b的代数余子式： $C_{12} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ c & \blacksquare \end{bmatrix} = -c$

c的代数余子式： $C_{21} = \begin{bmatrix} \blacksquare & b \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} = -b$

d的代数余子式： $C_{22} = \begin{bmatrix} a & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} = a$

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

上一节提到过代数余子式的正负号与行列号之和有关，和是奇数，代数余子式是取负号，和是偶数取正号。

由此一来，A的逆矩阵就等于A的行列式的倒数乘以某个由代数余子式组成的矩阵：

$$\text{let } C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

上式中的 C^T 就是原矩阵A的伴随矩阵，它是由A衍生而来的。由于转置的缘故，伴随矩阵中的 C_{ji} 就是原矩阵中 C_{ji} 的代数余子式。

克莱姆法则

现在把逆矩阵的公式应用到方程中：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$Ax = b$

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}C^Tb$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

似乎有些杂乱无章，进一步看x的每一个分量，会发现x的各个分量都包含A中某列元素的代数余子式。以x₁和x₂为例：

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \underbrace{b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}}_{a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1}}$$
$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \underbrace{b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2}}_{a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \cdots + a_{n2}C_{n2}}$$

x₁相当于将det(A)按照第一列展开，x₂相当于将det(A)按照第二列展开，只不过把它们的展开列替换成了b，相当于：

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将x₁和x₂后面的行列式分别按第1列和第2列展开成代数余子式，就得到了每一个分量的结果。这就是克莱姆法则，也叫克拉默法则。

克莱姆法则有一种常用的记法，在Ax = b中，未知数的系数构成了系数行列式D：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若线性方程组的系数矩阵可逆（非奇异），即系数行列式 D≠0，则线性方程组有唯一解，其每一个分量的解为：

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

其中D_j是把D中第j列元素对应地换成b中的元素而其余各列保持不变所得到的行列式，比如：

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

克莱姆法则为方程组的解提供了一个代数表达式，让你能使用代数运算，而不只是写算法，但是如果真的用它来解方程将变成一个灾难，因为你必须对n+1个行列式求值。克莱姆法则研究了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系。与其在计算方面的作用相比，克莱姆法则更具有重大的理论价值。

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 提个issue，最速降线中 $v = \sqrt{2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 伴随矩阵, 克拉默法则, 克莱姆法则

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

推荐

0

反对

« 上一篇: 寻找“最好” (4) ——不等约束和KKT条件

» 下一篇: 线性代数笔记22——特征值和特征向量

posted on 2018-12-25 17:05 我是8位的 阅读(3939) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

FinestUI Core

12,000

800

900

9

WebForms升级到ASP.NET Core

fineui.com

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
- Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes